Олимпиада по математике 2018

учащихся учреждений начального профессионального образования

Калужской области

Решения задач.

1.1. Четыре одинаковые рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять таких же рубашек дороже куртки?

Решение:

Стоимость четырех рубашек – (100%–8%)/100%=0,92 от стоимости куртки. Стоимость одной рубашки – 0,92/4=0,23 стоимости куртки. Стоимость пяти рубашек – 0,23\*5=1,15 стоимости куртки. Следовательно, пять рубашек на (1,15–1)\*100%=15% дороже куртки.

Ответ: 15%.

1.2. Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 20 кг изюма, если виноград содержит 90% воды, а изюм содержит 5% воды.

Решение:

Виноград содержит 10 % сухого вещества, а изюм – 5%. Обозначим x – количество кг винограда, y – количество кг сухого вещества, тогда

$$y=20∙0,95=19 x=\frac{19}{0,1}=190$$

Ответ: 190 кг.

1.3. Из 30 студентов 21 изучает английский, 13 – немецкий и 11 – французский язык. 9 студентов изучают английский и немецкий, 6 – английский и французский, 5 – немецкий и французский. Сколько студентов изучают все три языка.

Решение:

Обозначим A, B, C – множества студентов, изучающих английский, немецкий, французский языки соответственно; P(A), P(B), P(C) – мощности соответствующих множеств, тогда

$$P\left(A∪B∪C\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)+P\left(C\right)-$$

$$-P\left(A∩B\right)-P\left(B∩C\right)-P\left(C∩A\right)+P(A∩B∩C)$$

то есть $30=21+13+11-9-6-5+P(A∩B∩C)$ и

$$P\left(A∩B∩C\right)=5$$

Ответ: 5.

1.4. Найдите значение выражения $\frac{sin\left(75^{0}\right)+cos\left(15^{0}\right)}{cos\left(165^{0}\right)}$.

Решение:

$$\frac{sin\left(75^{0}\right)+cos\left(15^{0}\right)}{cos\left(165^{0}\right)}=\frac{sin\left(75^{0}\right)+cos\left(90^{0}-75^{0}\right)}{cos\left(90^{0}+75^{0}\right)}=\frac{sin\left(75^{0}\right)+sin\left(75^{0}\right)}{sin\left(75^{0}\right)}=2$$

Ответ: 2.

1.5. Найдите значение выражения $ log\_{2}3∙log\_{3}4+\frac{lg5}{lg2}∙log\_{5}8$

Решение:

$$ log\_{2}3∙log\_{3}4+\frac{lg5}{lg2}∙log\_{5}8= log\_{2}3^{log\_{3}4}+ log\_{2}5^{log\_{5}8}= log\_{2}4+ log\_{2}8=5$$

Ответ: 5.

2.1. Найдите уравнение касательной к графику функции $y=\sqrt{x}$, если абсцисса точки касания $x\_{0}=1$.

Решение:

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ задается формулой

$y=f\left(x\_{0}\right)+f^{'}\left(x\_{0}\right)∙(x-x\_{0})$.

Здесь $x\_{0}=1, f\left(x\_{0}\right)=\sqrt{x\_{0}}=1, f^{'}\left(x\_{0}\right)=\frac{1}{2\sqrt{x\_{0}}}=\frac{1}{2}$,

тогда $y=1+0,5∙\left(x-1\right)=0,5x+0,5$

Ответ: $y=0,5x+0,5$.

2.2. Решите уравнение: $sinx+\cos(x)=1$.

Решение:

1-й способ. Введение дополнительного угла.

$$sinx+\cos(x)=1 \frac{1}{\sqrt{2}}sinx+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)=\frac{1}{\sqrt{2}} sin\left(\frac{π}{4}\right)sinx+\cos(x)\left(\frac{π}{4}\right)\cos(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$cos\left(x-\frac{π}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{\begin{array}{c}x=\frac{π}{4}-\frac{π}{4}+2πn, n\in Z\\x=\frac{π}{4}+\frac{π}{4}+2πn, n\in Z\end{array}\right. \left\{\begin{array}{c}x=2πn, n\in Z\\x=\frac{π}{2}+2πn, n\in Z\end{array}\right.$$

2-й способ. Сведение к тангенсу половинного угла.

$$sinx+\cos(x)=1 2sin\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)+cos^{2}\left(\frac{x}{2}\right)-sin^{2}\left(\frac{x}{2}\right)=cos^{2}\left(\frac{x}{2}\right)+sin^{2}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$2sin\left(\frac{x}{2}\right)cos\left(\frac{x}{2}\right)-2sin^{2}\left(\frac{x}{2}\right)=0 tg\left(\frac{x}{2}\right)-tg^{2}\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

$$\left\{\begin{array}{c}tg\left(\frac{x}{2}\right)=0\\tg\left(\frac{x}{2}\right)=1\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}\frac{x}{2}=πn, n\in Z\\\frac{x}{2}=\frac{π}{4}+πn, n\in Z\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}x=2πn, n\in Z\\x=\frac{π}{2}+2πn, n\in Z\end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\begin{array}{c}x=2πn, n\in Z\\x=\frac{π}{2}+2πn, n\in Z\end{array}\right.$.

2.3. Дан тетраэдр ABCD с длиной ребра равной 1. Точки M и N являются серединами ребер DB и DC соответственно. Найдите площадь сечения AMN.

Решение:

$AM=AN=\frac{\sqrt{3}}{2}, MN=\frac{1}{2}$.

Полупериметр AMN $p=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)∙\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}$



По формуле Герона площадь треугольника AMN

 $S=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\right)∙\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{4}\right)∙\frac{1}{4}∙\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{11}}{16}$

Ответ: $\frac{\sqrt{11}}{16}$.

2.4. Решите неравенство: $ log\_{x^{2}}\left(x+1\right)^{2}\leq 1$.

Решение:

$$\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x^{2}>1\\\left(x+1\right)^{2}\leq x^{2}\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}0<x^{2}<1\\\left(x+1\right)^{2}\geq x^{2}\end{array}\right.\end{array}\right. \left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x^{2}>1\\2x+1\leq 0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}0<x^{2}<1\\2x+1\geq 0\end{array}\right.\end{array}\right. \left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x\in \left(-\infty ;-1\right)∪\left(1;+\infty \right)\\x\in \left(-\infty ;\right.\left.-0,5\right]\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x\in \left(-1;0\right)∪\left(0;1\right)\\x\in \left[-0,5\right.\left.;-\infty \right)\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Ответ: $x\in \left(-\infty ;-1\right)∪\left[-0,5\right.\left.;0\right)∪\left(0;1\right)$.

2.5. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 96. Найдите стороны треугольника ABC.

Решение:

Построим отрезок DG параллельно биссектрисе BE.

По свойству медианы BC=2AB.

По свойствам биссектрисы AF=FD=48 и EC=2AE.

Из подобия треугольников BEC и DGC EG=GC и DG=BE/2=48. Из подобия треугольников AFE и ADG FE =DG /2=24 и BF=BE-FE=72.

 $AB=\sqrt{72^{2}+48^{2}}=24\sqrt{13}$

 $BC=2AB=48\sqrt{13}$

 $AC=3AE=3\sqrt{48^{2}+24^{2}}=72\sqrt{5}$

Ответ: $AB=24\sqrt{13}$;

 $BC=48\sqrt{13}$;

 $AC=72\sqrt{5}$.